ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

# CONCOURS D'ENTRÉE 1982

## OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

# PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**Durée : 3 heures**

*N.B. Ce sujet comporte 2 pages de texte.*

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ , d'axes $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ .
Un point M(t) , mobile en fonction du temps t , décrit la droite (y'Oy) avec une vitesse constante $v > 0$. Un second point mobile dans le plan (P) , N(t) , a son mouvement par rapport au repère R régi par les deux conditions :

$\begin{cases} (C_1) : \text{le vecteur vitesse du point N est constamment colinéaire au vecteur } \vec{NM} \text{ et de même sens.} \\ (C_2) : \text{la vitesse numérique du point N est constante, égale à } \frac{v}{\alpha} \text{ ( } \alpha \text{ paramètre strictement positif).} \end{cases}$

A l'instant initial (t = 0), les coordonnées des points M(0) et N(0) sont respectivement $(0, y_o)$ et $(a, 0)$ ($y_o$ réel, et a réel strictement positif, donnés). On n'étudiera le mouvement que jusqu'à la rencontre éventuelle des points M(t) et N(t) et on admettra que celle-ci se produit dès que l'abscisse de N(t) s'annule.

- Dans les questions 1°) à 4°) le seul repère utilisé est R.

1° - Déduire des conditions $(C_1, C_2)$ un système différentiel à 2 équations reliant t , x et y coordonnées du point N(t) dans le repère R . On note $Z(x) = \frac{dy}{dx}$ .
Etablir l'équation différentielle $(E_1)$ : $x \frac{dZ}{dx} - \alpha \sqrt{1+Z^2} = 0$

2° - Intégrer $(E_1)$ , puis établir l'équation différentielle $(E_2)$ :
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2K} (K^2 x^{\alpha} - x^{-\alpha})$ où K est une constante positive auxiliaire, que l'on calculera en fonction de a et $y_o$ . On conservera dans la suite du problème la notation K afin d'alléger les formules.

3° - Pour $\alpha = 1$ , déterminer l'équation de la trajectoire du point N , puis indiquer sur un schéma les différentes formes possibles de trajectoire en fonction des paramètres. Donner la loi horaire du mouvement, c'est-à-dire une relation liant x et t .

4° - On suppose dans cette question $\alpha \neq 1$ ;

a) Trouver l'équation de la trajectoire $C_N$ du point N .

b) A quelle condition portant sur le paramètre $\alpha$ , les points M(t) et N(t) se rencontrent-ils ? Comment calculer alors l'instant $t_1$ de leur rencontre ? Quelle est alors la longueur du chemin parcouru par le point N entre les instants O et $t_1$ ?

Donner les valeurs précédentes en fonction de a et v pour $\alpha = \frac{1}{2}$ , dans les deux cas $y_o = -a$ et $y_o = O$ .

c) Calculer le nombre de zéros de la fonction Z sur l'intervalle $]O,a[$ . Faire un schéma de la trajectoire du point N dans les différents cas possibles.

d) Calculer le rayon de courbure en un point N à $C_N$ . En déduire l'expression de la norme du vecteur accélération du point N en fonction de x .

5° - On suppose $\alpha \neq 1$ . Soit $R_1$ le repère mobile d'origine M(t) défini par $R_1 = \{M(t), \vec{i}, \vec{j}\}$. Donner l'équation de la trajectoire $C_N^1$ du point N(t) par rapport au repère $R_1$ .

Le mouvement du point N par rapport au repère $R_1$ est-il un mouvement uniforme ?

Dessiner $C_N^1$ dans le cas : $\alpha = \frac{1}{2}$ , $y_o = -a$ .

6° - Existe-t-il des mouvements du point N , qui vérifient la condition $C_2$ mais pas nécessairement $C_1$ , et tels que l'instant $t_1'$ de la rencontre entre M et N soit inférieur à celui, $t_1$ , du mouvement étudié précédemment (4°b) ? Justifier votre réponse en donnant un exemple précis, uniquement dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ , $y_o = O$ .

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail